

# Polynômes

---

Corrections de Léa Blanc-Centi.

## 1 Opérations sur les polynômes

### Exercice 1

Trouver le polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

[Correction ▼](#)    [Vidéo ■](#)

[000427]

## 2 Division, pgcd

### Exercice 2

1. Effectuer la division euclidienne de  $A$  par  $B$  :

(a)  $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$ ,  $B = X^2 + 2X + 3$

(b)  $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ ,  $B = X^3 + X + 2$

(c)  $A = X^4 - X^3 + X - 2$ ,  $B = X^2 - 2X + 4$

(d)  $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ ,  $B = X^2 - 5X + 4$

2. Effectuer la division selon les puissances croissantes de  $A$  par  $B$  à l'ordre  $k$  (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par  $X^{k+1}$ ) :

(a)  $A = 1 - 2X + X^3 + X^4$ ,  $B = 1 + 2X + X^2$ ,  $k = 2$

(b)  $A = 1 + X^3 - 2X^4 + X^6$ ,  $B = 1 + X^2 + X^3$ ,  $k = 4$

[Correction ▼](#)    [Vidéo ■](#)

[006955]

### Exercice 3

À quelle condition sur  $a, b, c \in \mathbb{R}$  le polynôme  $X^4 + aX^2 + bX + c$  est-il divisible par  $X^2 + X + 1$  ?

[Correction ▼](#)    [Vidéo ■](#)

[006956]

### Exercice 4

1. Déterminer les pgcd des polynômes suivants :

(a)  $X^3 - X^2 - X - 2$  et  $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$

(b)  $X^4 + X^3 - 2X + 1$  et  $X^3 + X + 1$

(c)  $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$  et  $X^4 + 2X^3 + X + 2$

(d)  $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$  et  $X^n - nX + n - 1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

2. Calculer le pgcd  $D$  des polynômes  $A$  et  $B$  ci-dessous. Trouver des polynômes  $U$  et  $V$  tels que  $AU + BV = D$ .

- (a)  $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$   
 et  $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$
- (b)  $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$   
 et  $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006957]

### Exercice 5

- Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , alors le quotient et le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ , ainsi que  $\text{pgcd}(A, B)$ , sont aussi à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ .
- Soit  $a, b, c \in \mathbb{C}^*$  distincts, et  $0 < p < q < r$  des entiers. Montrer que si  $P(X) = (X - a)^p(X - b)^q(X - c)^r$  est à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , alors  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006958]

## 3 Racines et factorisation

### Exercice 6

- Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$  les polynômes suivants :

$$a) X^3 - 3 \quad b) X^{12} - 1 \quad c) X^6 + 1 \quad d) X^9 + X^6 + X^3 + 1$$

- Factoriser les polynômes suivants :

$$a) X^2 + (3i - 1)X - 2 - i \quad b) X^3 + (4 + i)X^2 + (5 - 2i)X + 2 - 3i$$

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006959]

### Exercice 7

Pour quelles valeurs de  $a$  le polynôme  $(X + 1)^7 - X^7 - a$  admet-il une racine multiple réelle ?

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000410]

### Exercice 8

Chercher tous les polynômes  $P$  tels que  $P + 1$  soit divisible par  $(X - 1)^4$  et  $P - 1$  par  $(X + 1)^4$ .

*Indications.* Commencer par trouver une solution particulière  $P_0$  avec l'une des méthodes suivantes :

- à partir de la relation de Bézout entre  $(X - 1)^4$  et  $(X + 1)^4$ ;
- en considérant le polynôme dérivé  $P'_0$  et en cherchant un polynôme de degré minimal.

Montrer que  $P$  convient si et seulement si le polynôme  $P - P_0$  est divisible par  $(X - 1)^4(X + 1)^4$ , et en déduire toutes les solutions du problème.

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000370]

### Exercice 9

Quels sont les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P'$  divise  $P$  ?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000378]

### Exercice 10

Trouver tous les polynômes  $P$  qui vérifient la relation

$$P(X^2) = P(X)P(X + 1)$$

**Exercice 11**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

Montrer alors que toutes les racines de  $P$  sont réelles, simples, et appartiennent à l'intervalle  $[-2, 2]$ .

**Exercice 12**

1. Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  un polynôme de degré  $n \geq 1$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Démontrer que si  $P$  admet une racine dans  $\mathbb{Z}$ , alors celle-ci divise  $a_0$ .
2. Les polynômes  $X^3 - X^2 - 109X - 11$  et  $X^{10} + X^5 + 1$  ont-ils des racines dans  $\mathbb{Z}$ ?

**Exercice 13**

Soient  $a_0, \dots, a_n$  des réels deux à deux distincts. Pour tout  $i = 0, \dots, n$ , on pose

$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

(les  $L_i$  sont appelés *polynômes interpolateurs de Lagrange*). Calculer  $L_i(a_j)$ .

Soient  $b_0, \dots, b_n$  des réels fixés. Montrer que  $P(X) = \sum_{i=0}^n b_i L_i(X)$  est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  qui vérifie :

$$P(a_j) = b_j \quad \text{pour tout } j = 0, \dots, n.$$

*Application.* Trouver le polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

Le calcul du pgcd se fait par l'algorithme d'Euclide, et la "remontée" de l'algorithme permet d'obtenir  $U$  et  $V$ .

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

Calculer  $\text{pgcd}(P, P')$ .

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

---

Si  $P = P'Q$  avec  $P \neq 0$ , regarder le degré de  $Q$ .

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

---

Montrer que si  $P$  est un polynôme non constant vérifiant la relation, alors ses seules racines possibles sont 0 et 1.

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

---

Pour l'existence, preuve par récurrence sur  $n$ . Pour les racines, montrer que  $P(x) = 2 \cos(n \arccos(x/2))$ .

---

### Correction de l'exercice 1 ▲

On cherche  $P$  sous la forme  $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ , ce qui donne le système linéaire suivant à résoudre :

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = -2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \end{cases}$$

Après calculs, on trouve une unique solution :  $a = \frac{3}{2}$ ,  $b = -2$ ,  $c = -\frac{1}{2}$ ,  $d = 1$  c'est-à-dire

$$P(X) = \frac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1.$$

### Correction de l'exercice 2 ▲

1. (a)  $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$

(b)  $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^3 + X + 2)(3X^2 + 2X - 3) - 9X^2 - X + 7$

(c)  $X^4 - X^3 + X - 2 = (X^2 - 2X + 4)(X^2 + X - 2) - 7X + 6$

(d)  $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$   
 $= (X^2 - 5X + 4)(X^3 - 2X^2 - 14X - 63) - 268X + 261$

2. (a)  $1 - 2X + X^3 + X^4 = (1 + 2X + X^2)(1 - 4X + 7X^2) + X^3(-9 - 6X)$

(b)  $1 + X^3 - 2X^4 + X^6 = (1 + X^2 + X^3)(1 - X^2 - X^4) + X^5(1 + 2X + X^2)$

### Correction de l'exercice 3 ▲

La division euclidienne de  $A = X^4 + aX^2 + bX + c$  par  $B = X^2 + X + 1$  donne

$$X^4 + aX^2 + bX + c = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + a) + (b - a + 1)X + c - a$$

Or  $A$  est divisible par  $B$  si et seulement si le reste  $R = (b - a + 1)X + c - a$  est le polynôme nul, c'est-à-dire si et seulement si  $b - a + 1 = 0$  et  $c - a = 0$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. L'algorithme d'Euclide permet de calculer le pgcd par une suite de divisions euclidiennes.

(a)  $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2 = (X^3 - X^2 - X - 2)(X^2 - X) + 2X^2 - 3X - 2$

puis  $X^3 - X^2 - X - 2 = (2X^2 - 3X - 2)(\frac{1}{2}X + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}X - \frac{3}{2}$

puis  $2X^2 - 3X - 2 = (\frac{3}{4}X - \frac{3}{2})(\frac{8}{3}X + \frac{4}{3})$

Le pgcd est le dernier reste non nul, divisé par son coefficient dominant :

$$\text{pgcd}(X^3 - X^2 - X - 2, X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2) = X - 2$$

(b)  $X^4 + X^3 - 2X + 1 = (X^3 + X + 1)(X + 1) - X^2 - 4X$

puis  $X^3 + X + 1 = (-X^2 - 4X)(-X + 4) + 17X + 1$

$$\text{donc pgcd } (X^4 + X^3 - 2X + 1, X^3 + X + 1) \\ = \text{pgcd}(-X^2 - 4X, 17X + 1) = 1$$

car  $-X^2 - 4X$  et  $17X + 1$  n'ont pas de racine (même complexe) commune.

(c)  $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 = (X^4 + 2X^3 + X + 2)(X + 1) - X^3 - 1$

puis  $X^4 + 2X^3 + X + 2 = (-X^3 - 1)(-X - 2) + 2X^3 + 2$

$$\text{pgcd}(X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1, X^4 + 2X^3 + X + 2) = X^3 + 1$$

$$(d) \quad nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$$

$$= (X^n - nX + n - 1)(nX - (n+1)) + n^2(X-1)^2$$

Si  $n = 1$  alors  $X^n - nX + n - 1 = 0$  et le pgcd vaut  $(X-1)^2$ . On constate que 1 est racine de  $X^n - nX + n - 1$ , et on trouve  $X^n - nX + n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X - (n-1))$ .

Si  $n \geq 2$  : 1 est racine de  $X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X - (n-1)$  et on trouve

$$X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X - (n-1)$$

$= (X-1)(X^{n-2} + 2X^{n-3} + \dots + (n-1)X^2 + nX + (n+1))$ , donc finalement  $(X-1)^2$  divise  $X^n - nX + n - 1$  (on pourrait aussi remarquer que 1 est racine de multiplicité au moins deux de  $X^n - nX + n - 1$ , puisqu'il est racine de ce polynôme et de sa dérivée). Ainsi

$$\text{si } n \geq 2, \text{ pgcd}(nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1, X^n - nX + n - 1) = (X-1)^2$$

$$2. (a) \quad A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2 \text{ et } B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$$

$$\text{donc } A = BQ_1 + R_1 \text{ avec } Q_1 = X + 1, R_1 = -2X^3 - 10X^2 - 16X - 8$$

$$\text{puis } B = R_1Q_2 + R_2 \text{ avec } Q_2 = -\frac{1}{2}X + \frac{3}{2} \text{ et } R_2 = 9X^2 + 27X + 18$$

$$\text{et enfin } R_1 = R_2Q_3 \text{ avec } Q_3 = -\frac{2}{9}X - \frac{4}{9}$$

Donc  $D = X^2 + 3X + 2$ , et on obtient

$$9D = B - R_1Q_2 = B - (A - BQ_1)Q_2 = -AQ_2 + B(1 + Q_1Q_2)$$

soit

$$\begin{cases} U = \frac{1}{9}(-Q_2) = \frac{1}{18}X - \frac{1}{6} \\ V = \frac{1}{9}(1 + Q_1Q_2) = -\frac{1}{18}X^2 + \frac{1}{9}X + \frac{5}{18} \end{cases}$$

$$(b) \quad \text{On a } A = BQ_1 + R_1 \text{ avec } Q_1 = X^2 + 1, R_1 = X^2 - X - 1$$

$$\text{puis } B = R_1Q_2 + R_2 \text{ avec } Q_2 = X^2 - X + 1 \text{ et } R_2 = -X + 2$$

$$\text{et enfin } R_1 = R_2Q_3 + R_3 \text{ avec } Q_3 = -X - 1 \text{ et } R_3 = 1$$

Donc  $D = 1$ , et on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= R_1 - R_2Q_3 = R_1 - (B - R_1Q_2)Q_3 = R_1(1 + Q_2Q_3) - BQ_3 \\ &= (A - BQ_1)(1 + Q_2Q_3) - BQ_3 \\ &= A(1 + Q_2Q_3) - B(Q_1(1 + Q_2Q_3) + Q_3) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{cases} U = 1 + Q_2Q_3 = -X^3 \\ V = -Q_1(1 + Q_2Q_3) - Q_3 = 1 + X + X^3 + X^5 \end{cases}$$

## Correction de l'exercice 5 ▲

1. Lorsqu'on effectue la division euclidienne  $A = BQ + R$ , les coefficients de  $Q$  sont obtenus par des opérations élémentaires (multiplication, division, addition) à partir des coefficients de  $A$  et  $B$  : ils restent donc dans  $\mathbb{Q}$ . De plus,  $R = A - BQ$  est alors encore à coefficients rationnels.

Alors  $\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(B, R)$  et pour l'obtenir, on fait la division euclidienne de  $B$  par  $R$  (dont le quotient et le reste sont encore à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ ), puis on recommence... Le pgcd est le dernier reste non nul, c'est donc encore un polynôme à coefficients rationnels.

2. Notons  $P_1 = \text{pgcd}(P, P')$  : comme  $P$  est à coefficients rationnels,  $P'$  aussi et donc  $P_1$  aussi. Or  $P_1(X) = (X-a)^{p-1}(X-b)^{q-1}(X-c)^{r-1}$ . En itérant le processus, on obtient que  $P_{r-1}(X) = (X-c)$  est à coefficients rationnels, donc  $c \in \mathbb{Q}$ .

On remonte alors les étapes :  $P_{q-1}(X) = (X-b)(X-c)^{r-q+1}$  est à coefficients rationnels, et  $X-b$  aussi en tant que quotient de  $P_{q-1}$  par le polynôme à coefficients rationnels  $(X-c)^{r-q+1}$ , donc  $b \in \mathbb{Q}$ . De même, en considérant  $P_{p-1}$ , on obtient  $a \in \mathbb{Q}$ .

## Correction de l'exercice 6 ▲

1. (a)  $X^3 - 3 = (X - 3^{1/3})(X^2 + 3^{1/3}X + 3^{2/3})$  où  $X^2 + 3^{1/3}X + 3^{2/3}$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$ . On cherche ses racines complexes pour obtenir la factorisation sur  $\mathbb{C}$  :

$$X^3 - 3 = (X - 3^{1/3})(X + \frac{1}{2}3^{1/3} - \frac{i}{2}3^{5/6})(X + \frac{1}{2}3^{1/3} + \frac{i}{2}3^{5/6})$$

- (b) Passons à  $X^{12} - 1$ .  $z = re^{i\theta}$  vérifie  $z^{12} = 1$  si et seulement si  $r = 1$  et  $12\theta \equiv 0[2\pi]$ , on obtient donc comme racines complexes les  $e^{ik\pi/6}$  ( $k = 0, \dots, 11$ ), parmi lesquelles il y en a deux réelles ( $-1$  et  $1$ ) et cinq couples de racines complexes conjuguées ( $e^{i\pi/6}$  et  $e^{11i\pi/6}$ ,  $e^{2i\pi/6}$  et  $e^{10i\pi/6}$ ,  $e^{3i\pi/6}$  et  $e^{9i\pi/6}$ ,  $e^{4i\pi/6}$  et  $e^{8i\pi/6}$ ,  $e^{5i\pi/6}$  et  $e^{7i\pi/6}$ ), d'où la factorisation sur  $\mathbb{C}[X]$  :

$$\begin{aligned} X^{12} - 1 = & (X - 1)(X + 1)(X - e^{i\pi/6})(X - e^{11i\pi/6})(X - e^{2i\pi/6}) \\ & (X - e^{10i\pi/6})(X - e^{3i\pi/6})(X - e^{9i\pi/6})(X - e^{4i\pi/6}) \\ & (X - e^{8i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6})(X - e^{7i\pi/6}) \end{aligned}$$

Comme  $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = (X^2 - 2\cos(\theta)X + 1)$ , on en déduit la factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  :

$$\begin{aligned} X^{12} - 1 = & (X - 1)(X + 1)(X^2 - 2\cos(\pi/6)X + 1) \\ & (X^2 - 2\cos(2\pi/6)X + 1)(X^2 - 2\cos(3\pi/6)X + 1) \\ & (X^2 - 2\cos(4\pi/6)X + 1)(X^2 - 2\cos(5\pi/6)X + 1) \\ = & (X - 1)(X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1) \\ & (X^2 - X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \end{aligned}$$

- (c) Pour  $X^6 + 1$ ,  $z = re^{i\theta}$  vérifie  $z^6 = -1$  si et seulement si  $r = 1$  et  $6\theta \equiv \pi[2\pi]$ , on obtient donc comme racines complexes les  $e^{i(\pi+2k\pi)/6}$  ( $k = 0, \dots, 5$ ). D'où la factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  :

$$\begin{aligned} X^6 + 1 = & (X - e^{i\pi/6})(X - e^{3i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6})(X - e^{7i\pi/6}) \\ & (X - e^{9i\pi/6})(X - e^{11i\pi/6}) \end{aligned}$$

Pour obtenir la factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$ , on regroupe les paires de racines complexes conjuguées :

$$X^6 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$

- (d)  $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = P(X^3)$  où  $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1 = \frac{X^4 - 1}{X - 1}$  : les racines de  $P$  sont donc les trois racines quatrièmes de l'unité différentes de 1 ( $i$ ,  $-i$ ,  $-1$ ) et

$$\begin{aligned} X^9 + X^6 + X^3 + 1 = & P(X^3) \\ = & (X^3 + 1)(X^3 - i)(X^3 + i) \\ = & (X^3 + 1)(X^6 + 1) \end{aligned}$$

On sait déjà factoriser  $X^6 + 1$ , il reste donc à factoriser le polynôme  $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$ , où  $X^2 - X + 1$  n'a pas de racine réelle. Donc

$$\begin{aligned} X^9 + X^6 + X^3 + 1 = & (X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + 1) \\ & (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \end{aligned}$$

Pour la factorisation sur  $\mathbb{C}$  : les racines de  $X^2 - X + 1$  sont  $e^{i\pi/3}$  et  $e^{5i\pi/3}$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} X^9 + X^6 + X^3 + 1 = & (X + 1)(X - e^{i\pi/3})(X - e^{5i\pi/3}) \\ & (X - e^{i\pi/6})(X - e^{3i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6}) \\ & (X - e^{7i\pi/6})(X - e^{9i\pi/6})(X - e^{11i\pi/6}) \end{aligned}$$

2. (a) Pour  $X^2 + (3i - 1)X - 2 - i$ , on calcule le discriminant

$$\Delta = (3i - 1)^2 - 4(-2 - i) = -2i$$

et on cherche les racines carrées (complexes!) de  $\Delta$  :  $w = a + ib$  vérifie  $w^2 = \Delta$  si et seulement si  $w = 1 - i$  ou  $w = -1 + i$ . Les racines du polynôme sont donc  $\frac{1}{2}(-(3i - 1) \pm (1 - i))$  et  $P(X) = (X + i)(X - 1 + 2i)$ .

(b) Pour  $X^3 + (4 + i)X^2 + (5 - 2i)X + 2 - 3i$  :  $-1$  est racine évidente, et  $P(X) = (X + 1)(X^2 + (3 + i)X + 2 - 3i)$ . Le discriminant du polynôme  $X^2 + (3 + i)X + 2 - 3i$  vaut  $\Delta = 18i$ , ses deux racines carrées complexes sont  $\pm(3 + 3i)$  et finalement on obtient  $P(X) = (X + 1)(X - i)(X + 3 + 2i)$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ;  $x$  est une racine multiple de  $P$  si et seulement si  $P(x) = 0$  et  $P'(x) = 0$  :

$$\begin{aligned} P(x) = P'(x) = 0 &\iff \begin{cases} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ 7(x+1)^6 - 7x^6 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x+1)x^6 - x^7 - a = 0 \\ (x+1)^6 = x^6 \end{cases} \quad \text{en utilisant la deuxième équation} \\ &\iff \begin{cases} x^6 = a \\ (x+1)^3 = \pm x^3 \end{cases} \quad \text{en prenant la racine carrée} \\ &\iff \begin{cases} x^6 = a \\ x+1 = \pm x \end{cases} \quad \text{en prenant la racine cubique} \end{aligned}$$

qui admet une solution ( $x = -\frac{1}{2}$ ) si et seulement si  $a = \frac{1}{64}$ .

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. On remarque que si  $P$  est solution, alors  $P + 1 = (X - 1)^4 A$  et par ailleurs  $P - 1 = (X + 1)^4 B$ , ce qui donne  $1 = \frac{A}{2}(X - 1)^4 + \frac{-B}{2}(X + 1)^4$ . Cherchons des polynômes  $A$  et  $B$  qui conviennent : pour cela, on écrit la relation de Bézout entre  $(X - 1)^4$  et  $(X + 1)^4$  qui sont premiers entre eux, et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \frac{5}{32}X^3 + \frac{5}{8}X^2 + \frac{29}{32}X + \frac{1}{2} \\ \frac{-B}{2} &= -\frac{5}{32}X^3 + \frac{5}{8}X^2 - \frac{29}{32}X + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a alors par construction

$$(X - 1)^4 A - 1 = 2 \left( 1 + (X + 1)^4 \frac{-B}{2} \right) = 1 + (X + 1)^4 B$$

et  $P_0 = (X - 1)^4 A - 1$  convient. En remplaçant, on obtient après calculs :

$$P_0 = \frac{5}{16}X^7 - \frac{21}{16}X^5 + \frac{35}{16}X^3 - \frac{35}{16}X$$

2. Si  $(X - 1)^4$  divise  $P + 1$ , alors 1 est racine de multiplicité au moins 4 de  $P + 1$ , et donc racine de multiplicité au moins 3 de  $P'$  : alors  $(X - 1)^3$  divise  $P'$ . De même  $(X + 1)^3$  divise  $P'$ . Comme  $(X - 1)^3$  et  $(X + 1)^3$  sont premiers entre eux, nécessairement  $(X - 1)^3(X + 1)^3$  divise  $P'$ . Cherchons un polynôme de degré minimal : on remarque que les primitives de

$$\lambda(X - 1)^3(X + 1)^3 = \lambda(X^2 - 1)^3 = \lambda(X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1)$$

sont de la forme  $P(X) = \lambda(\frac{1}{7}X^7 - \frac{3}{5}X^5 + X^3 - X + a)$ . Si  $P$  convient, nécessairement 1 est racine de  $P + 1$  et  $-1$  est racine de  $P - 1$ , ce qui donne  $\lambda(\frac{16}{35} + a) = -1$  et  $\lambda(\frac{16}{35} + a) = 1$ . D'où  $\lambda a = 0$  et comme on cherche  $P$  non nul, il faut  $a = 0$  et  $\lambda = \frac{35}{16}$ . On vérifie que

$$P_0(X) = \frac{35}{16}(\frac{1}{7}X^7 - \frac{3}{5}X^5 + X^3 - X) = \frac{5}{16}X^7 - \frac{21}{16}X^5 + \frac{35}{16}X^3 - \frac{35}{16}X$$



est bien solution du problème : le polynôme  $A = P_0 + 1$  admet 1 comme racine, i.e.  $A(1) = 0$ , et sa dérivée admet 1 comme racine triple donc  $A'(1) = A''(1) = A'''(1) = 0$ , ainsi 1 est racine de multiplicité au moins 4 de  $A$  et donc  $(X - 1)^4$  divise  $A = P + 1$ . De même,  $(X + 1)^4$  divise  $P - 1$ .

Supposons que  $P$  soit une solution du problème. On note toujours  $P_0$  la solution particulière obtenue ci-dessus. Alors  $P + 1$  et  $P_0 + 1$  sont divisibles par  $(X - 1)^4$ , et  $P - 1$  et  $P_0 - 1$  sont divisibles par  $(X + 1)^4$ . Ainsi  $P - P_0 = (P + 1) - (P_0 + 1) = (P - 1) - (P_0 - 1)$  est divisible par  $(X - 1)^4$  et par  $(X + 1)^4$ . Comme  $(X - 1)^4$  et  $(X + 1)^4$  sont premiers entre eux, nécessairement  $P - P_0$  est divisible par  $(X - 1)^4(X + 1)^4$ . Réciproquement, si  $P = P_0 + (X - 1)^4(X + 1)^4A$ , alors  $P + 1$  est bien divisible par  $(X - 1)^4$  et  $P - 1$  est divisible par  $(X + 1)^4$ . Ainsi les solutions sont exactement les polynômes de la forme

$$P_0(X) + (X - 1)^4(X + 1)^4A(X)$$

où  $P_0$  est la solution particulière trouvée précédemment, et  $A$  un polynôme quelconque.

### Correction de l'exercice 9 ▲

Le polynôme nul convient. Dans la suite on suppose que  $P$  n'est pas le polynôme nul.

Notons  $n = \deg P$  son degré. Comme  $P'$  divise  $P$ , alors  $P$  est non constant, donc  $n \geq 1$ . Soit  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P = P'Q$ . Puisque  $\deg(P') = \deg(P) - 1 \geq 0$ , alors  $Q$  est de degré 1. Ainsi  $Q(X) = aX + b$  avec  $a \neq 0$ , et donc

$$P(X) = P'(X)(aX + b) = aP'(X)\left(X + \frac{b}{a}\right)$$

Donc si  $z \neq \frac{-b}{a}$  et si  $z$  est racine de  $P$  de multiplicité  $k \geq 1$ , alors  $z$  est aussi racine de  $P'$  avec la même multiplicité, ce qui est impossible. Ainsi la seule racine possible de  $P$  est  $\frac{-b}{a}$ .

Réciproquement, soit  $P$  un polynôme avec une seule racine  $z_0 \in \mathbb{C}$  : il existe  $\lambda \neq 0$ ,  $n \geq 1$  tels que  $P = \lambda(X - z_0)^n$ , qui est bien divisible par son polynôme dérivé.

### Correction de l'exercice 10 ▲

Si  $P$  est constant égal à  $c$ , il convient si et seulement si  $c = c^2$ , et alors  $c \in \{0; 1\}$ .

Dans la suite on suppose  $P$  non constant. Notons  $Z$  l'ensemble des racines de  $P$ . On sait que  $Z$  est un ensemble non vide, fini.

*Analyse*

Si  $z \in Z$ , alors  $P(z) = 0$  et la relation  $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$  implique  $P(z^2) = 0$ , donc  $z^2 \in Z$ . En itérant, on obtient  $z^{2^k} \in Z$  (pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ). Si  $|z| > 1$ , la suite  $(|z^{2^k}|)_k$  est strictement croissante donc  $Z$  contient une infinité d'éléments, ce qui est impossible. De même si  $0 < |z| < 1$ , la suite  $(|z^{2^k}|)_k$  est strictement décroissante, ce qui est impossible pour la même raison. Donc les éléments de  $Z$  sont soit 0, soit des nombres complexes de module 1.

De plus, si  $P(z) = 0$ , alors toujours par la relation  $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$ , on a que  $P((z - 1)^2) = 0$  donc  $(z - 1)^2 \in Z$ . Par le même raisonnement que précédemment, alors ou bien  $z - 1 = 0$  ou bien  $|z - 1| = 1$ .

En écrivant  $z = a + ib$ , on vérifie que  $|z| = |z - 1| = 1$  équivaut à  $z = e^{\pm i\pi/3}$ . Finalement,  $Z \subset \{0, 1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$ .

Or si  $e^{\pm i\pi/3}$  était racine de  $P$ , alors  $(e^{\pm i\pi/3})^2$  devrait aussi être dans  $Z$ , mais ce n'est aucun des quatre nombres complexes listés ci-dessus. Donc ni  $e^{i\pi/3}$ , ni  $e^{-i\pi/3}$  ne sont dans  $Z$ . Les deux seules racines (complexes) possibles sont donc 0 et 1. Conclusion : le polynôme  $P$  est nécessairement de la forme  $\lambda X^k(X - 1)^\ell$ .

*Synthèse*

La condition  $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$  devient

$$\lambda X^{2k}(X^2 - 1)^\ell = \lambda^2 X^k(X - 1)^\ell(X + 1)^k X^\ell$$

$$\text{qui équivaut à } \begin{cases} \lambda^2 = \lambda \\ 2k = k + \ell \\ k = \ell \end{cases} .$$

Autrement dit  $k = \ell$  et  $\lambda = 1$  (puisque'on a supposé  $P$  non constant).

*Conclusion* Finalement, les solutions sont le polynôme nul et les polynômes  $(X^2 - X)^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  ( $k = 0$  donne le polynôme 1).

---

### Correction de l'exercice 11 ▲

---

1. Commençons par remarquer que si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes qui conviennent, alors pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $P(z + \frac{1}{z}) - Q(z + \frac{1}{z}) = 0$ . En appliquant cette égalité à  $z = e^{i\theta}$ , on obtient  $(P - Q)(2 \cos \theta) = 0$ . Le polynôme  $P - Q$  a une infinité de racines, donc il est nul, ce qui montre  $P = Q$ .
2. Montrons l'existence de  $P$  par récurrence forte sur  $n$  :
  - Pour  $n = 0$ ,  $P = 2$  convient et pour  $n = 1$ ,  $P = X$  convient.
  - Passage des rangs  $k \leq n$  au rang  $n + 1$ . Si on note  $P_k$  le polynôme construit pour  $k \leq n$ , on a

$$z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} = (z + \frac{1}{z})(z^n + \frac{1}{z^n}) - (z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}) = (z + \frac{1}{z})P_n(z + \frac{1}{z}) - P_{n-1}(z + \frac{1}{z})$$

donc  $P_{n+1}(X) = XP_n(X) - P_{n-1}(X)$  convient.

- On a ainsi construit  $P_n$  pour tout  $n$  (avec  $\deg P_n = n$ ).
3. Fixons  $n$  et notons  $P$  le polynôme obtenu. Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $P(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = e^{in\theta} + e^{-in\theta}$  donc  $P(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(n\theta)$ .  
En posant  $x = 2 \cos(\theta)$  et donc  $\theta = \arccos(\frac{x}{2})$  on obtient la relation Ainsi,

$$P(x) = 2 \cos(n \arccos(\frac{x}{2})) \quad \forall x \in [-2, 2]$$

Le polynôme dérivée est  $P'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} \sin(n \arccos(\frac{x}{2}))$ , il s'annule en changeant de signe en chaque  $\alpha_k = 2 \cos(\frac{k\pi}{n})$ , ainsi  $P'(\alpha_k) = 0$  pour  $k = 0, \dots, n$ .

On calcule aussi que  $P(\alpha_k) = \pm 2$ . Le tableau de signe montre que  $P$  est alternativement croissante (de  $-2$  à  $+2$ ) puis décroissante (de  $+2$  à  $-2$ ) sur chaque intervalle  $[\alpha_{k+1}, \alpha_k]$ , qui forment une partition de  $[-2, 2]$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $P$  possède  $n$  racines simples (une dans chaque intervalle  $[\alpha_{k+1}, \alpha_k]$ ) dans  $[-2, 2]$ . Puisque  $P$  est de degré  $n$ , on a ainsi obtenu toutes ses racines.

---

### Correction de l'exercice 12 ▲

---

1. Si  $k \in \mathbb{Z}$  est racine de  $P$ , alors  $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \dots + a_1k = -a_0$  ce qui donne  $k(k^{n-1} + \dots + a_1) = -a_0$ , donc  $k$  divise  $a_0$ .
  2. Si  $X^3 - X^2 - 109X - 11$  a une racine  $k \in \mathbb{Z}$ , nécessairement  $k$  divise 11, donc  $k$  vaut  $-1, 1, -11$  ou  $11$ .  
En testant ces quatre valeurs, on trouve que seul 11 est racine.  
De même, si  $X^{10} + X^5 + 1$  admettait une racine entière  $k$ , celle-ci diviserait 1 donc vaut  $k = \pm 1$ , or on vérifie que ni  $+1$ , ni  $-1$  ne sont racines. Ainsi  $X^{10} + X^5 + 1$  n'a pas de racine entière.
- 

### Correction de l'exercice 13 ▲

---

On a

$$L_i(a_i) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1 \quad \text{et} \quad L_i(a_j) = 0 \text{ si } j \neq i$$

puisque le produit contient un facteur qui est nul :  $(a_j - a_j)$ . Puisque les  $L_i$  sont tous de degré  $n$ , le polynôme  $P$  est de degré inférieur ou égal à  $n$ , et  $P(a_j) = \sum_{i=0}^n b_i L_i(a_j) = b_i$ .

Il reste à montrer qu'un tel polynôme est unique. Supposons que  $Q$  convienne aussi, alors  $P - Q$  est de degré inférieur ou égal à  $n$  et s'annule en  $n + 1$  points (les  $a_i$ ), donc il est identiquement nul, i.e.  $P = Q$ .

Pour l'application on utilise les polynômes interpolateurs de Lagrange avec  $a_0 = 0, b_0 = 1; a_1 = 1, b_1 = 0; a_2 = -1, b_2 = -2; a_3 = 2, b_3 = 4$ . On sait qu'un tel polynôme  $P(X)$  est unique et s'écrit

$$P(X) = 1 \cdot L_0(X) + 0 \cdot L_1(X) - 2 \cdot L_2(X) + 4L_3(X)$$

où

$$L_0(X) = \frac{(X-1)(X+1)(X-2)}{(0-1)(0+1)(0-2)} = \frac{1}{2}(X^3 - 2X^2 - X + 2)$$

$$L_1(X) = \frac{(X-0)(X+1)(X-2)}{(1-0)(1+1)(1-2)} = \frac{-1}{2}(X^3 - X^2 - 2X)$$

$$L_2(X) = \frac{(X-0)(X-1)(X-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{-1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X)$$

$$L_3(X) = \frac{(X-0)(X-1)(X+1)}{(2-0)(2-1)(2+1)} = \frac{1}{6}(X^3 - X)$$

Ainsi :

$$P(X) = \frac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1.$$

---